Concours ITA session 2015

Composition : **Mathématiques 7** (algèbre, analyse)

Durée : **2 Heures**

La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques n'est pas autorisé. Si au cours de l'épreuve un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n° 1 :

On pose : $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2 t}{\cos(2t)} dt$ et $J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 t}{\cos(2t)} dt$.

1) Calculer $I - J$.
2) Calculer $I + J$.
3) En déduire I et J.

Exercice n° 2 :

Pour la fabrication d'un livre, on doit respecter sur chacune des pages des marges de 2 cm à droite et à gauche et de 3 cm en haut et en bas. Soit x et y les dimensions, en cm, d'une page.

1) Faire un schéma représentant une page et les différentes marges, ainsi que les dimensions x et y.
2) On suppose, dans cette question uniquement, que : $x = 28$ et $y = 31$.
   a. Calculer dans ce cas, en cm^2, l'aire de la portion de page disponible pour l'impression.
   b. Même question pour $x = 34$ et $y = 26$.
3) Dans le cas général, exprimer en fonction de x et y l'aire, en cm^2, de la surface disponible pour l'impression.
4) On désire que la surface disponible pour l'impression soit de 600 cm^2.
   a. Déterminer y en fonction de x pour que cette condition soit réalisée.
   b. En déduire l'aire $S(x)$ de la page.
   c. Étudier les variations de la fonction S.
   d. En déduire les dimensions de la page pour que la consommation de papier soit minimale.

Exercice n° 3 :

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose : $f_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_3$

1) Prouver que (f_1, f_2, f_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Écrire la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (f_1, f_2, f_3).
3) Déterminer la matrice de passage de la base (f_1, f_2, f_3) à la base (e_1, e_2, e_3).
4) On considère le vecteur u de coordonnées $(-1, 0, 2)$ dans la base canonique. Quelles sont ses coordonnées dans la base (f_1, f_2, f_3) ?
5) On considère l'endomorphisme $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y - 2z, -x - z, -x + 2y) \end{cases}$.
   Déterminer la matrice de θ dans la base (f_1, f_2, f_3).

Exercice n° 4 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^2 - 5A + 4I_2$ avec I_2 la matrice identité d'ordre 2.
2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3) Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 4$.
4) En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.